DISTRIBUTIONS OF RANDOM VARIABLE

DISTRIBUSI VARIABEL RANDOM

1.11 Chebyshev's Inequality

(Ketaksamaan Chebyshev)

A. Pendahuluan

Konsep atau rumus yang berhubungan dengan Ketaksamaan Chebyshev

- Ekspektasi yang berkaitan dengan suatu variabel random

  $E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx$ bila x kontinu

  $E[u(X)] = \sum_x u(x) f(x)$ bila x diskrit

  $E[u(X)] = \mu$

  Varians dari X akan dilambangkan dengan σ^2, dan jika σ^2 ada, kita mendefinisikannya dengan $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$, untuk X adalah variabel random jenis diskrit atau kontinu.

  Untuk menghitung varians σ^2

  $$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

  $$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

  $$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

  $$= E(X^2) - \mu^2$$

  σ lambang dari simpangan baku

- Fungsi Pembangkit Momen

  fungsi pembangkit momen dari suatu variabel random X. Misalkan ada bilangan positif h sehingga untuk $-h < t < h$ ekspektasi matematikanya, $E(e^{tx})$ ada. Jadi

  $M(t) = E(e^{tx})$

B. Topik

Ketaksamaan Chebyshev

Dalam bagian ini kita akan membuktikan teorema yang memungkinkan kita untuk menemukan batas atas (atau bawah) untuk probabilitas (peluang) tertentu. Batas ini, bagaimanapun, tidak perlu dekat untuk probabilitas (peluang) yang tepat, dan maka, kita biasanya tidak menggunakan teorema untuk memperkirakan probabilitas. Prinsip penggunaan teorema dan kasus khusus itu adalah dalam diskusi teoritis.

Teorema 6. Misalkan u(X) adalah fungsi non negatif dari variabel random X. jika E[u (X)] ada, maka, untuk setiap c konstanta positif,

$$\Pr[\, u(X) \geq c \,] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

Bukti. Buktinya diberikan ketika variabel random X adalah tipe kontinyu, tetapi bukti dapat disesuaikan dengan kasus diskrit jika kita mengganti integral dengan jumlah. Misalkan A= { x ; u(x) ≥ c} dan misalkan f(x) menandakan p.d.f dari X. Maka

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx = \int_A u(x)f(x)dx + \int_{A^*} u(x)f(x)dx$$

karena setiap integral di anggota ekstrim ruas kanan dari persamaan sebelumnya adalah non negatif, anggota ruas kiri lebih besar dari atau sama dengan salah satu dari mereka. Secara khusus,

$$E[u(X)] \geq \int_A u(x)f(x)dx$$

Namun, jika x ϵ A, kemudian u(x) ≥ c; maka, anggota ruas kanan dari ketaksamaan sebelumnya tidak meningkat jika kita mengganti u(x) dengan c.

sehingga

$$E[u(X)] \geq c\int_A f(x)dx$$

Sejak

$$\int_A f(x)dx = \Pr(X \in A) = \Pr[u(X) \geq c]$$

itu mengikuti

$$E[u(X)] \geq c \Pr[u(X) \geq c]$$

yang merupakan hasil yang diinginkan.

Teorema sebelumnya adalah generalisasi dari ketaksamaan yang sering disebut ketaksamaan Chebyshev. Ketaksamaan ini sekarang akan dibentuk.

Teorema 7. Ketaksamaan Chebyshev. Misalkan variabel random X memiliki distribusi probabilitas tentang apa yang kita asumsikan bahwa hanya ada varians yang terbatas σ^2. ini, tentu saja, menyiratkan bahwa ada mean (rata-rata) μ.

Maka untuk setiap k > 0

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Atau equivalen dengan

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Bukti. Dalam teorema 6 ambil $u(X) = (X-\mu)^2$ dan $c = k^2\sigma^2$. kemudian kita mempunyai

$$\Pr[(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2] \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$$

karena pembilang dari anggota ruas kanan dari ketaksamaan sebelumnya adalah σ^2, dalam persamaan dapat ditulis

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

yang merupakan hasil yang diinginkan. Tentu, kami akan mengambil jumlah k positif lebih besar dari 1 untuk memiliki ketaksamaan yang di cari.

Hal ini terlihat bahwa bilangan $1/k^2$ adalah batas atas untuk probabilitas $\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma)$. Dalam contoh berikut ini batas atas dan nilai yang tepat dari probabilitas dibandingkan dalam kejadian khusus.

Contoh 1. misal X mempunyai p.d.f

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

. = 0 yang lainnya.

Disini $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$. If k = 3/2, kita mempunyai probabilitas eksak

$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) = \Pr(|X| \geq \frac{3}{2}) = 1 - \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{3}}\, dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dengan ketaksamaan chebysev, probabilitas sebelumnya mempunyai batas atas $1/k^2 = 4/9$.

Sejak $1- \sqrt{\frac{3}{2}} = 0{,}134$, dengan perkiraan, probabilitas eksak dalam kasus ini adalah jauh kurang dari batas atas 4/9. Jika kita mengambil k=2, kita mempunyai kemungkinan $\Pr(|X| \geq 2) = 0$. Ini kembali dengan sangat kurang dari batas atas $1/k^2 = ¼$ menyajikan dalam ketaksamaan chebyshev.

Dalam setiap kejadian pada contoh sebelumnya, probabilitas $\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma)$ dan batas atas $1/k^2$ terikat berbeda jauh. Hal ini menunjukkan bahwa ketaksamaan ini mungkin dibuat lebih tajam. Namun, jika kita menginginkan ketaksamaan yang berlaku untuk setiap $k > 0$ dan berlaku untuk semua variabel random yang memiliki varians yang terbatas, seperti peningkatan adalah tidak mungkin, seperti yang ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh 2. Misal X variabel random tipe diskrit memiliki probabilitas 1/8, 6/8, 1/8 di titik x = -1,0,1, resvectively. Disini $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = ¼$. Jika k =2, kemudian $1/k^2 = ¼$ dan $\Pr(|X| \geq 1) = ¼$. Bahwa , probabilitas $\Pr(|X-\mu|) \geq k\sigma)$ berikut mencapai batas atas $1/k^2 = ¼$

Oleh karena itu ketaksamaan tersebut tidak dapat ditingkatkan tanpa asumsi lebih lanjut tentang distribusi dari X.

Tambahan

Jika peubah acak X memiliki rerata μ dan varian σ^2 tidak nol, maka kita dapat menghubungkan antara keduanya, dalam pernyataan peluang dan hukum ini ditemukan oleh seorang ahli matematika pada abad 19, yaitu P. I Chebyshev. Hukumnya atau rumusnya ini dinamakan ketaksamaan Chebyshev.

Buku pdf Pengantar Statistika Matematika oleh H. Maman Suherman,Drs.,M.Si

C. Latihan

1.104 Misalkan X (adalah) variabel random dengan mean dan misalkan $E[(X - \mu)^{2k}]$ ada. Tunjukkan, dengan d>0, bahwa $\Pr(|X- \mu| \geq d) \leq E[(X - \mu)^{2k}]/d^{2k}$

1.105 Misalkan X (adalah) suatu variabel random bahwa $\Pr(X \leq 0) = 0$ dan misalkan $\mu = E(X)$. Tunjukkan bahwa $\Pr(X \geq 2\mu) \leq 1/2$.

1.106 jika X adalah suatu variabel random yaitu E(X)=3 dan $E(X^2)=3$ gunakan ketaksamaan chebyshev's untuk menentukan batas bawah untuk probabilitas $\Pr(-2 < X < 8)$.

1.107 misalkan X (adalah) suatu variabel random dengan fungsi pembangkit momen M(t), $-h<t<h$. Buktikanlah bahwa

$$\Pr(X \geq a) \leq e^{-at} M(t), \quad 0 < t < h,$$

dan bahwa

$$\Pr(X \leq a) \leq e^{-at} M(t), \quad -h < t < 0.$$

Isyarat. Misal $u(x) = e^{tx}$ dan $c = e^{ta}$ di teorema 6. Catatan. Hasil ini menyiratkan bahwa $\Pr(X\geq a)$ dan $\Pr(X\leq a)$ kurang dari batas bawah yang paling rendah masing-masing $e^{-at} M(t)$ ketika $0 < t < h$ dan ketika $-h < t < 0$

1.108.fungsi pembangkit momen X ada untuk semua nilai-nilai riil t dan diberikan

$$M(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}, \ t \neq), M(0) = 1.$$

Menggunakan hasil dari latihan sebelumnya untuk menunjukkan bahwa $\Pr(X \geq 1)= 0$ dan $\Pr(X \leq -1) = 0$. Catatan bahwa di sini h tanpa batas.

Penyelesaian

1.104. Diketahui : X (adalah) variabel random dengan mean dan misalkan $E[(X - \mu)^{2k}]$ ada

Ditanya : dengan d > 0, tunjukkan bahwa $\Pr(|X- \mu| \geq d) \leq E[(X - \mu)^{2k]}/d^{2k}$

Jawab :

Dengan menggunakan bukti teorema 6

$$\Pr[(X- \mu)^2 \geq k^2\sigma^{2]} \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$$

Ambil $\Pr(|X- \mu| \geq d) = \Pr(|X- \mu|^{2k} \geq d^{2k})$ kedua ruas dikali 2k, dengan k=0

$$\Pr(|X- \mu| \geq d) = \Pr(|X- \mu|^{2k} \geq d^{2k}) \leq \frac{E[(X-\mu)^{2k}]}{d^{2k}}$$

Sehinnga

$$\Pr(|X- \mu| \geq d) \leq \frac{E[(X-\mu)^{2k}]}{d^{2k}}$$

terbukti

1.105. Diketahui : X suatu variabel random bahwa $\Pr(X \leq 0) = 0$

$\mu = E(X)$

Ditanya : Tunjukkan $\Pr(X \geq 2\mu) \leq ½$

Jawab :

Adt (akan ditunjukkan)

$\Pr(X \geq 2\mu) \leq ½$

Misal $u(X) = X \rightarrow E(u(X)) = E(X) = \mu$

$c = 2\mu$

Dengan menggunakan teorema 6

$\Pr[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$, maka

$\Pr[X \geq c] \leq \frac{E(X)}{c}$

$\Pr[X \geq 2\mu] \leq \frac{E(X)}{2\mu}$

$\Pr[X \geq 2\mu] \leq \frac{\mu}{2\mu}$

$\Pr[X \geq 2\mu] \leq \frac{1}{2}$ terbukti

Jadi, terbukti bahwa Pr [X ≥ 2 μ] ≤ $\frac{1}{2}$

1.106. Diketahui : *E(X)* = μ = 3

E(X^2) = 13

Ditanya : batas bawah Pr(-2 < X < 8)

Jawab : $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$= 13 - 3^2$

$= 13 - 9$

$\sigma^2 = 4$

$\sigma = 2$

Dengan ketaksamaan Chebyshev,

Batas bawah

$$\Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr(|X - 3| \geq 2k) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr(|X - 3| \geq 2k) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr[-2k < (X - 3) < 2k] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr[-2k + 3 < X < 2k + 3] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Batas untuk Pr(-2 < X < 8)]

$-2k + 3 = -2$	$2k + 3 = 8$
$-2k = -5$	$2k = 5$
$k = \frac{5}{2}$	$k = \frac{5}{2}$

batas bawahnya adalah

$$1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} = 1 - \frac{1}{\frac{25}{4}} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0{,}84$$

Jadi, batas bawah untuk batas bawah Pr(-2 < X < 8) adalah $\frac{21}{25}$ = 0,84

1.107. Diketahui **:** fungsi pembangkit momen M(t), - h<t<h.

Ditanya : Buktikanlah bahwa

$\Pr(X \geq a) \leq e^{-at} M(t), \quad 0 < t < h$ dan

$\Pr(X \leq a) \leq e^{-at} M(t), \quad -h < t < 0.$

Jawab :

Adb $\Pr(X \geq a) \leq e^{-at} M(t), \quad 0 < t < h$ dan

$\Pr(X \leq a) \leq e^{-at} M(t), \quad -h < t < 0.$

Misal $u(x) = e^{tx}$ dan $c = e^{ta}$

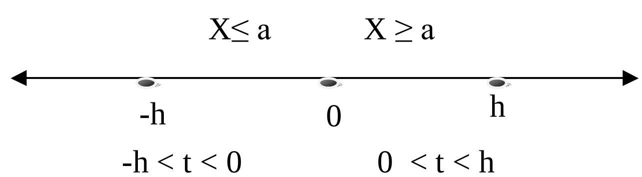
Dengan menggunakan teorema 6

$\Pr[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$, maka

$\Pr[e^{tx} \geq e^{ta}] \leq \frac{E[e^{tx}]}{e^{ta}}$

$\Pr[e^{tx} \geq e^{ta}] \leq \frac{M(t)}{e^{ta}}$

$\Pr[e^{tx} \geq e^{ta}] \leq e^{-ta} M(t)$



Hasil ini menyiratkan bahwa Pr (X≥ a) dan Pr (X≤a) kurang dari batas bawah yang paling rendah masing-masing $e^{-at} M(t)$ ketika $0 < t < h$ dan ketika $-h < t < 0$.

Sehingga didapatkan $\Pr(X \geq a) \leq e^{-at} M(t), \quad 0 < t < h$, dan

$\Pr(X \leq a) \leq e^{-at} M(t), \quad -h < t < 0$

Jadi, terbukti bahwa $\Pr(X \geq a) \leq e^{-at} M(t), \quad 0 < t < h$, dan

$\Pr(X \leq a) \leq e^{-at} M(t), \quad -h < t < 0$

1.108. Diketahui : fungsi pembangkit momen X ada untuk semua nilai-nilai riil t dan diberikan

$M(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}$, t ≠), M(0) = 1.

Ditanya : Tunjukkan bahwa Pr(X ≥ 1)= 0 dan Pr(X ≤ - 1) = 0

Jawab

Dengan menggunakan latihan sebelumnya

Pr (X $\geq$ a) $\leq e^{-at}$ M (t),

Pr (X $\leq$ a) $\leq e^{-at}$ M (t),

a = 1 , Pr (X $\geq$ 1) $\leq e^{-1t}$ M (t)

Pr (X $\geq$ 1) $\leq e^{-1t} \cdot \frac{e^{t} - e^{-t}}{2t}$

Pr (X $\geq$ 1) $\leq \frac{1 - e^{-2t}}{2t} = t^{-1} \cdot \frac{1 - e^{-2t}}{2}$

a = -1 , Pr (X $\geq$ 1) $\leq e^{1t}$ M (t)

Pr (X $\geq$ 1) $\leq e^{1t} \cdot \frac{e^{t} - e^{-t}}{2t}$

Pr (X $\geq$ 1) $\leq \frac{e^{2t} - 1}{2t} = t^{-1} \cdot \frac{e^{2t} - 1}{2}$

D. Kesimpulan

Ketaksamaan Chebishev

Jika peubah acak X memiliki rerata μ dan varian σ^2 tidak nol, maka kita dapat menghubungkan antara keduanya, rumus ini dinamakan ketaksamaan chebyshev.

Teorema 6. Misalkan u(X) adalah fungsi tak negatif dari variabel random X. jika E[u (X)] ada, maka, untuk setiap c konstanta positif,

$$\Pr [\ u(X) \geq c\ ] \leq \frac{E[u\ (X)]}{c}$$

Teorema 7. Ketaksamaan Chebyshev. Misalkan variabel random X memiliki distribusi probabilitas tentang apa yang kita asumsikan bahwa hanya ada varians yang terbatas σ^2. ini, tentu saja, menyiratkan bahwa ada mean (rata-rata) μ.

Maka untuk setiap k > 0

$$\Pr (|X- \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{(batas atas)}$$

Atau equivalen dengan

$$\Pr (|X- \mu| \geq k\sigma) \geq 1- \frac{1}{k^2} \quad \text{(batas bawah)}$$